Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Филиал «СЕВМАШВТУЗ» государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский морской технический университет» в г. Северодвинске

Д.В. Кузьмин

ДИНАМИКА

Учебное пособие

Северодвинск
2006

УДК 531 (075.8)

Кузьмин Д.В. Динамика: учебное пособие. – Северодвинск: РИО Севмашвтуза, 2006. – 41 с.

Ответственный редактор ст. преподаватель каф. «Проектирование подъемно-транспортного и технологического оборудования» Севмашвтуза Л.А. Ковалев.

Рецензенты: Зав. каф. «Робототехнические системы, машины и оборудование лесного компекса» Архангельского государственного технического университета,

к.т.н., доцент Б.К. Микитюк;

Ведущий инженер НИТИЦ ФГУП ПО «Севмаш»
Ю.П. Голованов.

Целью учебного пособия «Динамика» является оказание помощи студентам в выработке ими устойчивых навыков применения законов динамики в решении задач и, как следствие, достижении более глубокого понимания теоретических основ механики. Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей, изучающих теоретическую механику.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Севмашвтуза

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Динамика, в которой изучается движение механических систем под действием сил, является важнейшим разделом теоретической механики. Законы динамики составляют теоретическую основу дисциплин прикладной механики, таких, например, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, гидравлика и др. Поэтому уверенное знание динамики гарантирует успешное освоение механических инженерных дисциплин, изучаемых в технических вузах. Учебное пособие «Динамика» завершает серию пособий по основным разделам курса лекций «Теоретическая механика», читаемого в Севмашвтузе. Ранее изданные пособия из этой серии – «Статика», авторы Л.М. Крамской, Е.Л. Семина, 1999 г., «Кинематика», автор Д.В. Кузьмин, 2004 г.

Целью учебного пособия «Динамика» является оказание помощи студентам в выработке ими устойчивых навыков применения законов динамики в решении задач и, как следствие, достижении более глубокого понимания теоретических основ механики. Настоящее пособие разработано с учетом дидактического опыта автора в преподавании теоретической механики: в пособии подробно излагаются аксиомы и принципы динамики, а также наиболее трудные для понимания аспекты, такие, как интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений динамики, геометрия масс, применение основных теорем динамики. Пункты разделов данного пособия сопровождаются примерами решения задач.

Учебное пособие «Динамика» предназначено для студентов всех специальностей, изучающих теоретическую механику.

1. АКСИОМЫ И ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

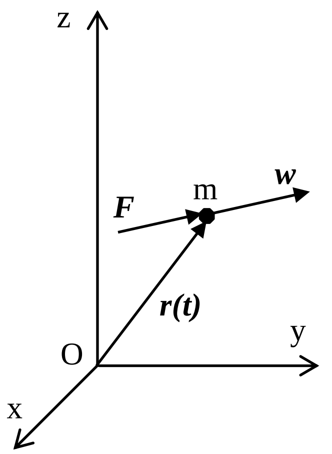
1.1. Основные понятия и аксиомы динамики

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором движение *механических систем* изучается в связи с причинами, вызывающими движение. В отличие от кинематики, где движение изучается только с позиции геометрии, точка в динамике имеет определенную *массу* и называется *материальной*. Напомним, что в виде материальной точки математически моделируются физические тела, линейные размеры которых можно считать пренебрежимо малыми. Механическая система представляет собой совокупность некоторого конечного числа материальных точек.

- *Масса* – это скалярная, положительная величина, характеризующая свойство материальной точки сопротивляться любому воздействию, изменяющему ее скорость. Такое свойство принято называть *инерцией*. Единица измерения массы – *килограмм (кг)*.
- ***Первая аксиома[1] динамики***. Существуют системы отсчета, в которых материальная точка покоится, либо движется прямолинейно и равномерно, если она не подвергается воздействиям. Такие системы отсчета называют *инерциальными*.

Инерциальные системы отсчета эквивалентны в том смысле, что в них одинаково соблюдаются все законы механики. Воздействие на материальную точку со стороны какого-либо объекта характеризуется *силой*.

- *Сила* – это векторная величина, характеризующая интенсивность и направление воздействия на материальную точку.
- ***Вторая аксиома динамики.*** Если в инерциальной системе отсчета материальная точка движется с ускорением (рис. 1), то на нее действует сила, пропорциональная ускорению. Коэффициентом пропорциональности является масса точки.



$$\boxed{\overline{F} = m\overline{w}}$$

Рис. 1

[1] Аксиома – это утверждение, которое принимается как достоверное без доказательства. Аксиомы составляют базу для доказательства других утверждений (например, теорем) при помощи законов логики. Обычно аксиомы формулируются как результат обобщения практического опыта наблюдений над изучаемыми объектами.

Вторая аксиома динамики дает единицу измерения силы – *ньютон (Н)*. Сила в один ньютон обеспечивает ускорение один метр в секунду за секунду точке массой один килограмм. Таким образом, $1Н = 1кг \cdot м/с^2$.

Практический опыт показывает, что сила развивается только тогда, когда есть сопротивление или *противодействие* движению. Например, можно нажать рукой на стол, но нельзя с той же силой нажать рукой на воздух, так как воздух не оказывает существенного сопротивления движению руки.

- ***Третья аксиома динамики***. Силовое воздействие всегда сопровождается таким же по величине силовым противодействием.

Из третьей аксиомы следует, что *материальная точка всегда противодействует ускоряющему ее объекту*. Согласно второй аксиоме, сила такого противодействия $\overline{\Phi} = -m\overline{w}$.

- Противодействие $\overline{\Phi}$, оказываемое материальной точкой ускоряющему ее объекту, называется *силой инерции точки*.
- ***Закон сложения сил.*** Ускорение, которое приобретает материальная точка при действии на нее суммы сил, равно сумме ускорений от каждой силы в отдельности.

$$\overline{w} = \frac{1}{m}(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_k) = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \ldots + \overline{w}_k .$$

Геометрическая сумма сил $\overline{F} = \sum_{i=1}^{k} \overline{F}_i$ представляет собой *равнодействующую*.

Из закона сложения сил следует, что несколько сил, действующих на точку, могут быть заменены равнодействующей.

- ***Принцип инвариантности массы[2].*** Масса материальной точки не зависит от выбора системы отсчета (является инвариантной по отношению к выбору системы отсчета).
- ***Принцип детерминированности (определенности) движения.*** Движение материальной точки однозначно определяется ее положением и скоростью в начальный момент времени.

Данный принцип позволяет вычислять закон движения материальной точки $\overline{r}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ путем интегрирования дифференциального *уравнения динамики* $m\overline{w} = \overline{F}$ (рис. 1), если заданы начальные условия $\overline{r}_0 = \overline{r}(t_0)$, $\overline{v}_0 = \overline{v}(t_0)$. Законы механики сформулированы для одной материальной точки, но они в полной мере справедливы для системы из любого конечного числа материальных точек.

[2] Принцип инвариантности массы справедлив только в тех случаях, когда скорость материальной точки много меньше скорости света в физическом вакууме: $v << c \approx 3 \cdot 10^8 м/с$.

1.2. Задачи динамики

В динамике решаются две основные задачи.

- ***Прямая задача*** динамики состоит в том, чтобы по известным силам, действующим на точки, найти движение механической системы. Решение прямой задачи сопряжено с интегрированием уравнения динамики системы при известных начальных условиях.
- ***Обратная задача*** динамики – по известным движениям точек механической системы найти необходимые для осуществления этих движений силы. Решение обратной задачи выполняется путем подстановки заданных законов движения в уравнения динамики механической системы.

Частным случаем динамики является *состояние равновесия* механической системы, т.е. такое ее состояние, при котором значения скоростей и ускорений материальных точек равно нулю на рассматриваемом интервале времени. Механические системы, находящиеся в состоянии равновесия, изучаются в разделе динамики – *статике*. Задачи статики состоят в следующем.

- Определение условий, при которых механическая система будет находиться в равновесии (условия равновесия).
- Разработка критериев эквивалентности систем сил и способов приведения сложных систем сил к более простым, эквивалентным.

Практически, любая механическая задача, возникающая при проектировании или автоматическом управлении машинами, сводится к какой-либо из перечисленных основных задач. Например, расчеты элементов конструкций на прочность и жесткость приводят к задачам статики или прямой задаче динамики, а расчет основных параметров исполнительных элементов машины (двигателей, механических передач), разработка систем управления движением машин осуществляются на основе решения обратной задачи динамики. *Таким образом, динамика является наиболее ценным разделом теоретической механики, тщательное изучение которого обеспечивает необходимую фундаментальную подготовку современного инженера.*

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Уравнения динамики материальной точки в декартовых координатах

Рассмотрим движение материальной точки относительно неподвижной декартовой системы координат $Oxyz$ (рис. 1). Вектор силы, действующей на точку $\overline{F} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T$, а вектор ускорения точки $\overline{w} = \begin{bmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{bmatrix}^T$. Тогда векторное уравнение динамики $m\overline{w} = \overline{F}$ будет равносильно трем скалярным уравнениям

$$m\ddot{x} = F_x, \; m\ddot{y} = F_y, \; m\ddot{z} = F_z. \qquad (1)$$

Уравнения (1) полностью определяют динамику точки в трехмерном пространстве. Если движение точки происходит в плоскости, то, направив какую-либо ось, например z, перпендикулярно плоскости движения, будем иметь два скалярных уравнения динамики $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$. Если точка движется прямолинейно, то, взяв ось x за направление движения, получим только одно уравнение $m\ddot{x} = F_x$.

Задача

По прямолинейному горизонтальному участку дороги движется автомобиль со скоростью V. В момент времени $t = 0$ автомобиль начинает торможение; при этом сила трения F колес о дорогу постоянна. Пройдя некоторый путь S с момента начала торможения, автомобиль останавливается. Как изменится тормозной путь автомобиля, если его скорость в момент начала торможения будет превышена в два раза?

Решение

Движение автомобиля будем рассматривать как движение его центра масс C (рис. 2).

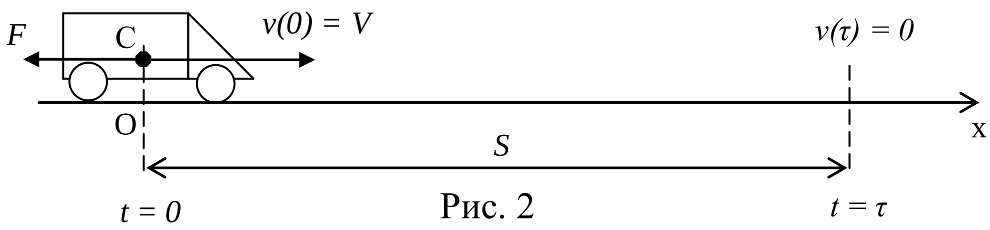


Рис. 2

За ось отсчета перемещений точки C примем неподвижную ось x. Начало отсчета O – положение точки C в момент начала торможения $t = 0$. Тогда уравнение динамики центра масс автомобиля будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -F,$$

знак “-“ указывает на то, что сила трения направлена в сторону, противоположную направлению x. Разделив правую и левую части уравнения динамики на массу автомобиля m, получим

$$\ddot{x} = -a \quad ,$$

где $a = F/m = const$. Найдем закон движения центра масс автомобиля $x(t)$, дважды проинтегрировав по времени t уравнение динамики

$$\dot{x}(t) = -a\int dt = -at + C_1,\ x(t) = \int(-at + C_1)dt = -\frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, значения которых определяются начальными условиями: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v(0) = V$. Вычислим эти постоянные, подставив начальные условия в выражения для $\dot{x}(t)$ и $x(t)$

$$V = -a \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = V,\ 0 = -a \cdot 0^2/2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Следовательно, центр масс автомобиля при торможении движется по закону

$$x(t) = \frac{-at^2}{2} + Vt.$$

Вычислим время τ, необходимое для полной остановки автомобиля

$$v(\tau) = -a\tau + V = 0 \Rightarrow \tau = V/a.$$

Подставив значение τ в закон движения центра масс, получим тормозной путь автомобиля

$$S = x(T) = \frac{-a(V/a)^2}{2} + V(V/a) = \frac{V^2}{2a}.$$

Если скорость превышена в <u>*два раза*</u>, то $V^* = 2V$, $S^* = 4V^2/2a = 2V^2/a$ и $n = S^*/S = \frac{2 \cdot 2V^2 a}{V^2 a} = 4$. Таким образом, тормозной путь автомобиля возрастет в <u>*четыре раза*</u>.

Задача

В шахте опускается равноускоренно лифт массы $m = 280$ кг. В первые $\tau = 10$ с он проходит $S = 35$ м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

Решение

Движение лифта будем рассматривать как движение его центра масс C (рис. 3). Лифт опускается под действием силы тяжести $G = mg$, $g = 9.8$ *м/с*^{2}, и силы натяжения каната T.

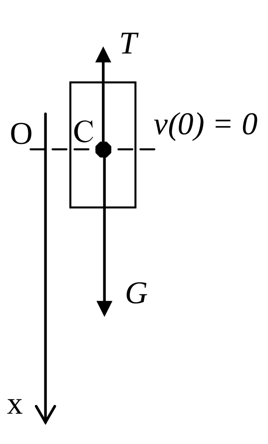


Рис. 3

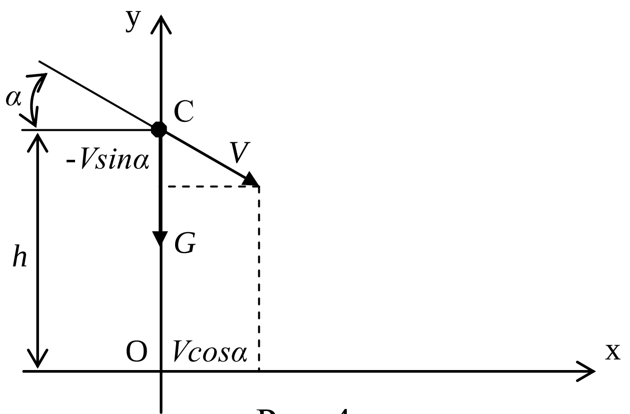


Рис. 4

Ось *x* направим вертикально вниз. За начало отсчета *O* примем положение центра масс *C* в момент начала движения. Тогда уравнение динамики лифта будет иметь вид

$$m\ddot{x} = G - T\ .$$

Равноускоренному движению лифта из положения *x(0) = 0* с начальной скоростью *v(0) = 0* соответствует закон $x(t) = at^2/2$, где $a = const$ - ускорение лифта. Найдем значение этого ускорения

$$S = x(\tau) = \frac{a\tau^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot S}{\tau^2} = \frac{2 \cdot 35}{10^2} = 0.7, \frac{м}{с^2}\ .$$

Подставляя найденное ускорение в уравнение динамики, получим

$$T = m(g - a) = 280 \cdot (9.8 - 0.7) = 2548, Н$$

Анализ результата показывает, что при ускоренном движении вниз сила натяжения каната меньше, чем она была бы в состоянии покоя лифта. В случае, когда *a = g* (свободное падение), сила натяжения каната равна нулю.

Задача

Стальной шарик скатывается по прямолинейному наклонному желобу, конец которого расположен на высоте *h* от пола. Угол наклона желоба – *α*. Найти траекторию движения шарика после его выхода из желоба, если скорость шарика на конце желоба равна *V*. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Примем шарик за материальную точку *C*. Ось *x* направим вдоль пола, Ось *y* – перпендикулярно оси *x* таким образом, чтобы она проходила через конец желоба. Начало отсчета *O* отметим на пересечении осей *x* и *y*. На шарик при его свободном падении действует сила тяжести *G = mg*, направленная вертикально вниз. Тогда уравнения динамики шарика будут иметь вид

$$m\ddot{x} = 0\ ,\ m\ddot{y} = -G\ .$$

Разделив правые и левые части этих уравнений на массу шарика *m*, получим

$$\ddot{x} = 0\ ,\ \ddot{y} = -g\ .$$

Дважды проинтегрируем по времени полученные уравнения динамики

$$\dot{x}(t) = C_1,\ x(t) = C_1 t + C_2\ ; \dot{y}(t) = -gt + C_3\ ,\ y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4\ .$$

Константы интегрирования найдем, воспользовавшись начальными условиями

$x(0) = 0, \dot{x}(0) = V\cos\alpha\ ,\ y(0) = h, \dot{y}(0) = -V\sin\alpha$ (см. рис. 4). Будем иметь

$$V\cos\alpha = C_1\ ,\ 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0\ ;$$

$-V\sin\alpha = -g\cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = -V\sin\alpha$, $h = -g\cdot 0^2/2 + C_3\cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = h$.

Следовательно, уравнения движения шарика имеют вид

$x(t) = (V\cos\alpha)\cdot t$, $y(t) = -gt^2/2 - (V\sin\alpha)\cdot t + h$.

Траекторию шарика *y(x)* найдем, выразив параметр *t* из первого уравнения и подставив его во второе уравнение: $t = x/(V\cos\alpha)$, $y(x) = -g\cdot x^2/(2V^2\cos^2\alpha) - x\cdot tg\alpha + h$. Таким образом, траектория шарика – ветвь параболы, направленная вниз.

2.2. Особенности интегрирования нелинейных уравнений динамики

Решение задач в ряде случаев приводит к необходимости интегрировать нелинейные дифференциальные уравнения динамики. Напомним, что линейными называются такие дифференциальные уравнения (ДУ), которые можно записать в виде

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_n\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{dx(t)}{dt} + a_1 x(t) = f(t),$$

где a_i, $i = 1,\ldots,n$, в общем случае являются функциями *t*.

Известно, что линейное ДУ всегда имеет аналитическое решение, которое может быть получено *классическим методом* или с использованием *операционного исчисления*. Нелинейные ДУ также могут быть решены аналитически в тех случаях, когда удается разделить переменные в уравнении.

В остальных случаях эти уравнения интегрируются с использованием *численных методов*. Наиболее частой ошибкой студентов при решении задач является попытка решить нелинейное уравнение динамики методом, пригодным только для линейных уравнений. Поэтому цель данного параграфа состоит в том, чтобы напомнить читателю, как следует поступать при интегрировании нелинейных уравнений динамики.

Задача

Материальная точка массой *m* движется в сплошной среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости точки. Коэффициент пропорциональности равен μ. Найти закон движения точки, если в момент времени *t = 0* она имела скорость *V*.

Решение

Направим ось x по направлению вектора скорости материальной точки *C* (рис. 5). За начало отсчета *O* примем положение точки в момент времени *t = 0*. Сила сопротивления F_c , действующая на точку, направлена в сторону, обратную движению точки и равна по абсолютной величине $\mu\cdot\dot{x}^2$.

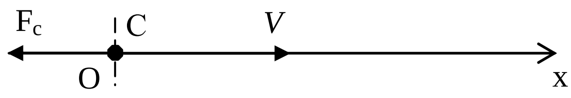


Рис. 5

Уравнение динамики точки будет иметь вид $m\ddot{x} = -\mu \cdot \dot{x}^2$. Поделив обе части уравнения на массу точки *m*, получим

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{m}\dot{x}^2.$$

Данное уравнение нелинейное, так как содержит $\dot{x}^2$. Найдем общий интеграл этого уравнения, выполнив разделение переменных. Для этого запишем его в следующем виде

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}v^2,$$

где $v = dx/dt$. Умножив обе части уравнения на *dt*, получим $dv = -\frac{\mu}{m}v^2 dt$, а затем, поделив обе части на $-\mu \cdot v^2/m$, будем иметь

$$-\frac{mdv}{\mu \cdot v^2} = dt.$$

Интегрируя равенство, получим

$$\frac{m}{\mu \cdot v} + C_1 = t,$$

откуда $v = \frac{m}{\mu \cdot (t - C_1)}$. Учитывая, что $v = dx/dt$, получим $dx = \frac{mdt}{\mu \cdot (t - C_1)}$.

Проинтегрировав это равенство, будем иметь

$$x(t) = \frac{m}{\mu}\ln|t - C_1| + C_2.$$

Вычислим постоянные интегрирования, воспользовавшись начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V$: $V = \frac{m}{\mu \cdot (0 - C_1)} \Rightarrow C_1 = -\frac{m}{\mu V}$,

$0 = \frac{m}{\mu}\ln\left|0 + \frac{m}{\mu V}\right| + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{m}{\mu}\ln\left|\frac{m}{\mu V}\right|$. Таким образом, уравнение движения точки будет иметь вид

$$x(t) = \frac{m}{\mu}\ln\left|t + \frac{m}{\mu V}\right| - \frac{m}{\mu}\ln\left|\frac{m}{\mu V}\right| = \frac{m}{\mu}\ln\left|\frac{\mu V}{m}t + 1\right|.$$

График функции *x(t)* при значениях m = 1 кг, μ = 0.1 Н·с^2/м^2, V = 0.5 м/с изображен на рис. 6.

x(t), м

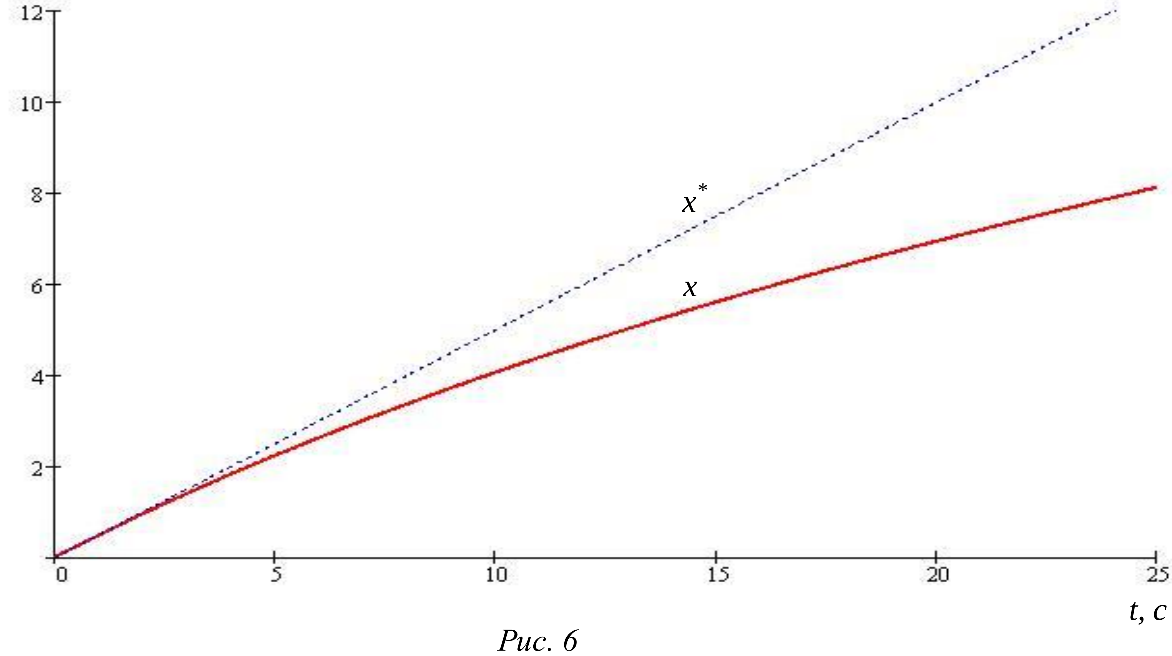


Рис. 6

Для сравнения приведен график $x^*(t) = 0.5 \cdot t$, соответствующий движению материальной точки в условиях отсутствия сопротивления.

2.3. Колебания материальной точки

Колебаниями материальной точки называются ее периодически повторяющиеся движения, возникающие в результате действия *восстанавливающей силы* (свободные колебания) или под действием *возмущающей силы*, изменяющейся по периодическому закону (вынужденные колебания). В качестве восстанавливающих сил могут действовать силы упругости пружин, силы гравитационного и электрического взаимодействия. Колебательные движения имеют принципиальное значение в технике и изучаются в специальном разделе теоретической механики – *теории колебаний*.

- *Гармоническими* называются колебания материальной точки, соответствующие закону $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, где *A, м* – *амплитуда* колебаний (наибольшее отклонение точки от состояния равновесия), *ω, рад/с* – *круговая частота*, *φ, рад* – *начальная фаза колебаний*.
- *Периодом колебаний* называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки через положение равновесия в определенном фиксированном направлении. Период гармонических колебаний вычисляется по соотношению $T = 2\pi/\omega$.
- *Затухающими* называются колебания материальной точки, соответствующие закону $x(t) = Ae^{-ht}\sin(t\sqrt{\omega^2 - h^2} + \beta)$, где $0 < h < \omega$, *β* – начальная фаза затухающих колебаний. Затухающие колебания имеют место тогда, когда кроме восстанавливающей силы на точку

действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки (например, вязкое трение).

- *Декрементом затухающих колебаний* называется величина $q^{-1} = e^{\frac{hT}{2}}$, *логарифмическим декрементом затухающих колебаний* – величина $\ln q^{-1} = hT/2$. В обоих равенствах $T = 2\pi\big/\sqrt{\omega^2 - h^2}$ - *период затухающих колебаний*. Эти понятия используются в задачах экспериментального определения коэффициента сопротивления вязкой среды.

Задача

Стальной шарик массы m подвешен на тонкой, нерастяжимой нити длины L. На шарик действует сила тяжести G. Определить закон движения шарика, если в начальный момент времени он был отклонен на малый угол φ_0 от положения равновесия и имел нулевую скорость. Силами трения пренебречь.

Решение

За начало отсчета O примем точку крепления нити к неподвижному основанию (рис. 7). Уравнение динамики шарика запишем в векторной форме

$$m\overline{w} = \overline{G} + \overline{T},$$

где T – сила натяжения нити. В проекциях на нормальное и тангенциальное направления это векторное уравнение будет равносильно двум скалярным уравнениям

$$mw_n = T - G\cos\varphi, \; mw_\tau = -G\sin\varphi.$$

Учитывая, что $w_n = L\dot{\varphi}^2$, $w_\tau = L\ddot{\varphi}$, получим

$$mL\dot{\varphi}^2 = T - G\cos\varphi, \; mL\ddot{\varphi} = -G\sin\varphi.$$

Так как нить нерастяжима, шарик в направлении нормали ***n*** не перемещается и, следовательно, $mL\dot{\varphi}^2 = T - G\cos\varphi$ есть уравнение статического равновесия.

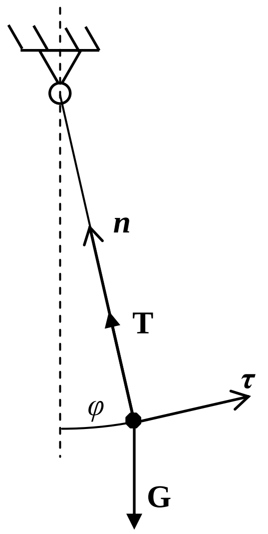


Рис. 7

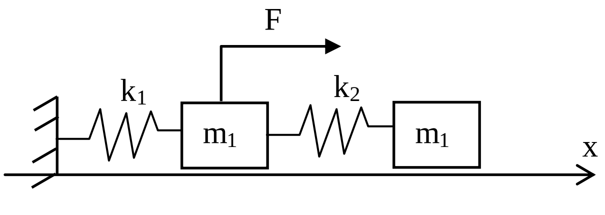


Рис. 8

Тогда уравнением динамики шарика будет $mL\ddot{\varphi} = -G\sin\varphi$. Разделив правую и левую части этого уравнения на mL, получим

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\sin\varphi .$$

По условию задачи, $\varphi \approx 0$, следовательно $\sin\varphi \approx \varphi$, и уравнение динамики для случая малых отклонений шарика от положения равновесия будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0 .$$

Таким образом, малые колебания шарика около положения равновесия описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Найдем решение этого уравнения <u>*классическим методом*</u>. Характеристический полином $\lambda^2 + g/L = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, где $\omega = \sqrt{g/L}$. Соответственно, общее решение будет иметь вид

$$\varphi(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t .$$

Константы интегрирования найдем, используя начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$: $0 = -\omega C_1\sin 0 + \omega C_2\cos 0 \Rightarrow C_2 = 0$, $\varphi_0 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 \Rightarrow C_1 = \varphi_0$. Тогда закон движения шарика $\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega t = \varphi_0\sin(\omega t - \pi/2)$ - гармонические колебания с амплитудой φ_0, частотой ω и начальной фазой $-\pi/2$.

Задача

По горизонтальной плоскости без трения могут перемещаться два тела массой m_1 и m_2 (рис. 8). Тело массой m_1 связано с неподвижной стенкой пружиной, жесткость которой k_1, а с телом массы m_2 – пружиной жесткостью k_2. На тело массой m_1 действует горизонтальная сила $F = F_0\sin\omega t$, $F_0 = const$. В начальный момент времени система покоилась в состоянии равновесия. Найти уравнения движения тел.

Решение

Рассмотрим движение тел как движение их центров масс. Пусть перемещение центра масс первого тела - x_1, второго – x_2. На основании второй аксиомы динамики будем иметь

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_0 \sin \omega t;$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1).$$

Так как начальные условия нулевые, движение системы двух тел будет определяться только возмущающей силой *F*. Найдем частное решение системы линейных дифференциальных уравнений динамики в следующем виде

$$x_1(t) = a\sin \omega t,\ x_2(t) = b\sin \omega t\ .$$

Подставив эти законы движения в уравнения динамики и, сократив на $\sin \omega t$, получим уравнения для определения амплитуд a и b

$$a = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2};\ b = \frac{F_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}\ .$$

Частное решение имеет смысл лишь для тех значений ω, для которых знаменатели полученных соотношений не равны нулю. Пусть $\omega^2 = k_2/m_2$. В этом случае $a = 0$, $b = -F_0/k_2$ и $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) = -(F_0/k_2)\sin \omega t$. То есть, при таком значении частоты ω изменения возмущающей силы *F* тело массы m_1, к которому приложена эта сила, остается неподвижным. Этот эффект называется *антирезонансом*. Эффект антирезонанса используют при конструировании динамических гасителей вибрации машин.

2.4. Вопросы для проверки усвоения материала

1) Что изучается в разделе динамика?
2) Сформулируйте аксиомы и принципы динамики.
3) Может ли силовое воздействие быть односторонним? Обоснуйте свой ответ, приведите примеры из практического опыта.
4) Что такое сила инерции материальной точки? Приведите примеры действия сил инерции из практического опыта.
5) Сформулируйте прямую и обратную задачи динамики.
6) Почему статика является частным случаем динамики механической системы?
7) Запишите уравнение динамики материальной точки в векторной форме и в декартовых координатах.
8) Может ли динамика материальной точки описываться нелинейным дифференциальным уравнением?
9) Какие движения материальной точки называют колебаниями?
10) Чем отличаются свободные колебания от вынужденных?
11) Что такое затухающие колебания? Приведите примеры затухающих колебаний из практического опыта.

3. ГЕОМЕТРИЯ МАСС

3.1. Центр масс механической системы

Центром масс механической системы из N материальных точек называют такую геометрическую точку C, положение которой определяется равенством

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{r}_\nu ,$$

где m_ν - массы, $\bar{r}_\nu$ - радиус-векторы положений материальных точек механической системы; $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ - масса всей механической системы. Если механическая система движется поступательно, то ее динамика может быть математически описана как динамика движения центра масс с сосредоточенной в нем массой всей системы. Центр масс системы называют также ее *центром инерции*.

Задача

Найти уравнения движения центра масс шарнирного четырехзвенного механизма $OABO_1$, если кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω. Звенья механизма – однородные стержни, причем $OA = O_1B = AB/2 = a$.

Решение

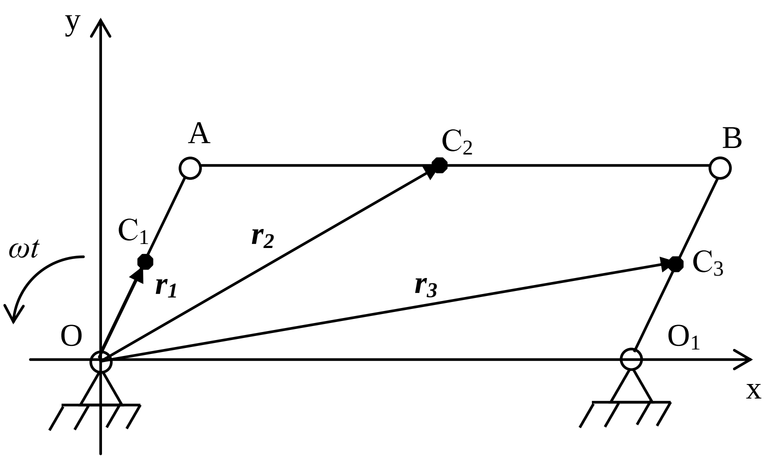


Рис. 9

Так как стержни однородные, то их центры масс C_1, C_2, C_3 будут находиться посередине каждого из стержней (рис. 9). Определим радиус-векторы этих центров масс

$$\bar{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}\cos\omega t \\ \frac{a}{2}\sin\omega t \end{bmatrix},\ \bar{r}_2 = \begin{bmatrix} a(\cos\omega t + 1) \\ a\sin\omega t \end{bmatrix},\ \bar{r}_3 = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}(\cos\omega t + 4) \\ \frac{a}{2}\sin\omega t \end{bmatrix}.$$

Радиус-вектор центра масс C механизма найдем с учетом того, что масса звена AB вдвое больше масс двух остальных подвижных звеньев: $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 2m$

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{3} m_\nu \bar{r}_\nu = \frac{m}{4m}\begin{bmatrix} \frac{a}{2}\cos\omega t + 2a(\cos\omega t + 1) + \frac{a}{2}(\cos\omega t + 4) \\ \frac{a}{2}\sin\omega t + 2a\sin\omega t + \frac{a}{2}\sin\omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}a\cos\omega t + a \\ \frac{3}{4}a\sin\omega t \end{bmatrix}.$$

Следовательно, искомые уравнения движения центра масс механизма имеют вид $x_C(t) = \frac{3}{4}a\cos\omega t + a$, $y_C(t) = \frac{3}{4}a\sin\omega t$.

3.2. Момент инерции механической системы относительно оси

Моментом инерции механической системы относительно некоторой оси u называют скалярную, положительную величину, определяемую соотношением

$$J_u = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \rho_\nu^2 ,$$

где ρ_υ – расстояния от соответствующих материальных точек системы до оси u. Момент инерции характеризует инерцию вращения механической системы вокруг данной оси и измеряется в *кг·м*^{2}.

Полярным моментом инерции относительно точки O называется величина

$$J_O = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{r}_\nu^2 ,$$

где $\bar{r}_\nu$ - радиус-векторы соответствующих материальных точек системы.

Задача

Показать, что центр масс механической системы можно определить как точку пространства, для которой полярный момент инерции наименьший.

Решение

Пусть центр масс C и точка O не совпадают. Тогда полярный момент инерции системы относительно центра масс определится соотношением
$$J_C = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\bar{r}_\nu - \bar{r}_C)^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{r}_\nu^2 - 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{r}_\nu \bar{r}_C + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{r}_C^2 = J_0 - 2M\cdot\bar{r}_C^2 + M\cdot\bar{r}_C^2 = J_0 - M\cdot\bar{r}_C^2 .$$

Так как величина $M\cdot\bar{r}_C^2$ положительна, то $J_C < J_0$ во всех случаях, кроме случая, когда $\bar{r}_C = 0$ (точка C совпадает с точкой O). Иначе говоря, полярный момент инерции системы относительно центра масс всегда меньше, чем момент инерции относительно любой другой точки пространства. Что и требовалось показать.

Задача

Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длины L и массы M относительно оси u, проходящей через середину стержня под прямым углом (рис. 10).

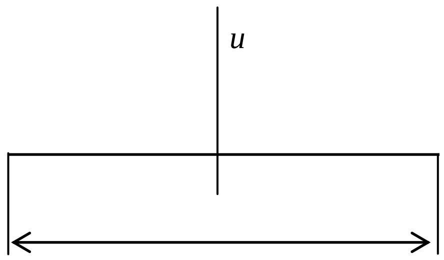


Рис. 10

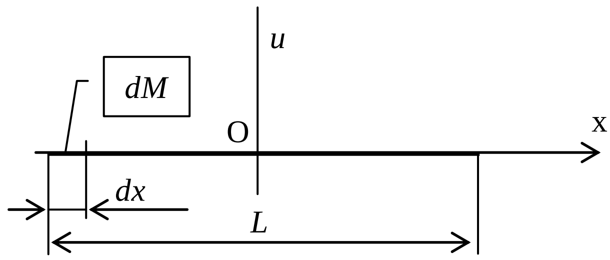


Рис. 11

Решение

Начало отсчета O длины стержня обозначим в точке пересечения оси u со стержнем. За направление отсчета длины примем ось x (рис. 11). Пусть dx – элементарный участок стержня. Масса этого элементарного участка $dM = \mu \cdot dx$, где $\mu = M/L$ - плотность распределения массы по длине стержня. Момент инерции стержня вычислим, учитывая непрерывность распределения массы и переходя от суммы к интегралу

$$J_u = \int_L x^2 dM = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24}\right) = \frac{ML^2}{12}.$$

Задача

В тонком однородном круглом диске радиуса R высверлено концентрическое отверстие радиуса r (рис. 12). Вычислить момент инерции этого диска массы M относительно оси z, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска.

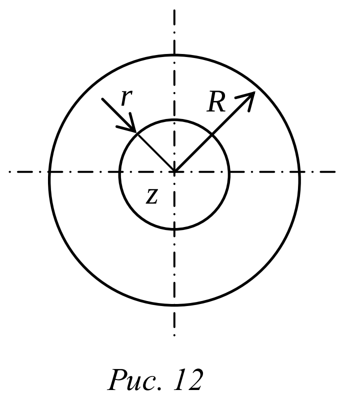


Рис. 12

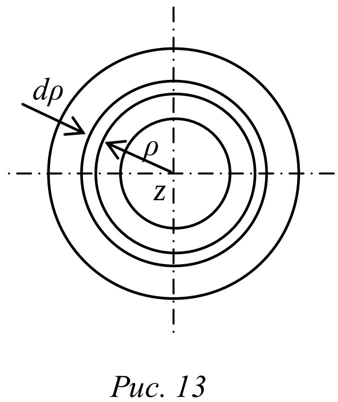


Рис. 13

Решение

Примем за элементарный участок диска кольцо радиуса ρ и ширины $d\rho$ (рис. 13). Площадь этого кольца будет равна $dS = \pi(\rho + d\rho)^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho \cdot d\rho + \pi(d\rho)^2$. Пренебрегая слагаемым второго порядка малости $\pi(d\rho)^2$, получим $dS = 2\pi\rho \cdot d\rho$. Тогда масса элементарного кольца $dM = \mu \cdot dS = \dfrac{2M\rho \cdot d\rho}{(R^2 - r^2)}$, где $\mu = \dfrac{M}{\pi(R^2 - r^2)}$ - плотность распределения массы по поверхности диска. Вычислим момент инерции диска относительно оси *z*:

$$J_z = \int_S \rho^2 dM = \frac{2M}{R^2 - r^2} \int_r^R \rho^3 d\rho = \frac{2M}{R^2 - r^2}\left(\frac{R^4}{4} - \frac{r^4}{4}\right) = \frac{M(R^2 + r^2)}{2}.$$

В случае, когда $r = R$ (диск представляет собой тонкое кольцо радиуса R) момент инерции будет иметь максимальное значение $J_z = MR^2$. Поэтому, при конструировании маховиков[3], большую часть их массы стремятся разместить как можно дальше от оси вращения.

3.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

Пусть известен момент инерции механической системы J_C относительно некоторой оси, проходящей через центр масс *C*. Тогда момент инерции системы относительно любой параллельной оси *u* может быть вычислен по формуле

$$J_u = J_C + Md^2, \tag{1}$$

где d – расстояние между осями. Соотношение (1) называется *теоремой Гюйгенса – Штейнера*.

Задача

Задан тонкий однородный стержень (рис. 10). Вычислить момент инерции этого стержня относительно оси *z*, проходящей через его конец под прямым углом к стержню.

Решение

Из решения задачи п. 3.2. известен момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс $J_C = ML^2/12$. Тогда, в соответствии с (1), искомый момент инерции будет равен

$$J_z = J_C + Md^2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2 + 3ML^2}{12} = \frac{ML^2}{3}.$$

[3] Маховик – деталь механизма в форме диска, имеющая большой момент инерции относительно оси вращения. Устанавливается, как правило, на быстроходном валу с целью уменьшения неравномерности движения механизма.

3.4. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку

Пусть ось *u* проходит через начало системы декартовых координат *Oxyz*. Тогда момент инерции механической системы относительно оси *u* можно выразить соотношением

$$J_u = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{xz}\alpha\gamma - 2J_{yz}\beta\gamma \ ,$$

где $\alpha = \cos(\bar{i},\bar{e})$, $\beta = \cos(\bar{j},\bar{e})$, $\gamma = \cos(\bar{k},\bar{e})$ - косинусы углов между направлением оси *u* (единичный вектор $\bar{e}$) и координатными осями *Ox, Oy, Oz*; $J_x = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2)$, $J_y = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2)$, $J_z = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2)$ - <u>*осевые моменты инерции*</u>; $J_{xy} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu y_\nu$, $J_{xz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu z_\nu$, $J_{yz} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu z_\nu$ - <u>*центробежные моменты инерции*</u>. Осевой момент инерции характеризует инертность механической системы при ее вращении относительно соответствующей оси. Центробежные моменты инерции характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей. Значения осевых и центробежных моментов инерции механической системы изменяются при повороте системы координат *Oxyz* вокруг точки *O* в соответствии с формулами, определяющими симметрический тензор второго ранга[4]

$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Тензор (2) называют <u>*тензором инерции*</u> системы для точки *O*.

[4] В математике скаляр называют тензором нулевого ранга, вектор – тензором первого ранга, матрицу вида (2) – тензором второго ранга.

Задача

Тонкий однородный стержень длины *2L* и массы *M* прикреплен в центре *O* к вертикальной оси, образуя с ней угол α (рис.14). Вычислить моменты инерции стержня J_x, J_y и центробежный момент инерции J_{xy} . Оси координат показаны на рисунке.

Решение

Обозначим *u* – ось стержня, тогда $dM = \dfrac{M}{2L}du$ - масса его элементарного участка. Для вычисления осевых и центробежного моментов инерции воспользуемся приведенными выше формулами, заменяя в них суммы интегралами:

$$J_x = \int\limits_{2L}(y^2 + z^2)dM\ ,\ J_y = \int\limits_{2L}(x^2 + z^2)dM\ ,\ J_{xy} = \int\limits_{2L}xydM\ .$$

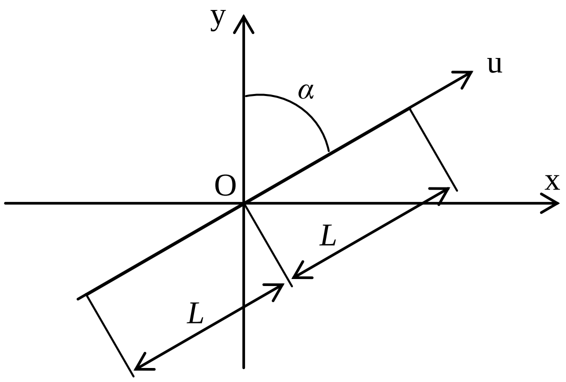


Рис. 14

Учитывая, что $z = 0$, $x = u\sin\alpha$, $y = u\cos\alpha$ получим

$$J_x = \int\limits_{2L} y^2 dM = \frac{M}{2L\cos\alpha}\int\limits_{-L\cos\alpha}^{L\cos\alpha} y^2 dy = \frac{M}{2L\cos\alpha}\left(\frac{L^3\cos^3\alpha}{3} + \frac{L^3\cos^3\alpha}{3}\right) = \frac{ML^2}{3}\cos^2\alpha\ ,$$

$$J_y = \int\limits_{2L} x^2 dM = \frac{M}{2L\sin\alpha}\int\limits_{-L\sin\alpha}^{L\sin\alpha} x^2 dx = \frac{M}{2L\sin\alpha}\left(\frac{L^3\sin^3\alpha}{3} + \frac{L^3\sin^3\alpha}{3}\right) = \frac{ML^2}{3}\sin^2\alpha,$$

$$J_{xy} = \int\limits_{2L} xydM = \frac{M}{2L\sin\alpha\cdot tg\alpha}\int\limits_{-L\sin\alpha}^{L\sin\alpha} x^2 dx = \frac{M\cos\alpha}{2L\sin^2\alpha}\left(\frac{L^3\sin^3\alpha}{3} + \frac{L^3\sin^3\alpha}{3}\right) = \frac{ML^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{ML^2}{6}\sin 2\alpha.$$

3.5. Вопросы для проверки усвоения материала

1) Что называют центром масс механической системы? В каком случае динамика механической системы может быть представлена как динамика движения ее центра масс?
2) Что называют моментом инерции механической системы относительно оси? Что характеризует эта величина и в каких единицах измеряется?
3) Что называют полярным моментом инерции механической системы? Что можно сказать о полярном моменте инерции системы относительно центра ее масс?
4) Как вычислить момент инерции механической системы относительно параллельной оси, если известен момент инерции этой системы относительно оси, проходящей через ее центр масс?
5) В каком случае при вычислении инерционно-массовых характеристик механической системы дискретное суммирование заменяется интегралом?
6) Как вычисляются осевые моменты инерции механической системы? Что они характеризуют?
7) Как вычисляются центробежные моменты инерции механической системы? Что они характеризуют?
8) Что называют тензором инерции механической системы?

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

4.1. Применение основных теорем динамики в решении задач

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из материальных точек P_ν, $\nu = 1,2,\ldots,N$. Если на точки системы наложены связи, то ее уравнения динамики могут быть представлены в виде

$$m_\nu \bar{w}_\nu = \bar{F}_\nu + \bar{R}_\nu, \; \nu = 1,2,\ldots,N, \tag{1}$$

где m_ν - массы точек, $\bar{w}_\nu = d^2\bar{r}_\nu / dt^2$ - ускорения точек относительно неподвижного начала отсчета, $\bar{F}_\nu$ - равнодействующие активных сил, $\bar{R}_\nu$ - равнодействующие сил реакций связей, приложенных к точкам. Для определения движения этой механической системы надо при заданных начальных условиях проинтегрировать систему уравнений (1) и найти $\bar{r}_\nu(t)$. Это вызывает серьезные трудности, особенно если число уравнений (1) велико.

Однако при решении задач часто нет необходимости интегрировать уравнения (1), а достаточно знать изменение со временем некоторых величин, общих для всей механической системы и являющихся функциями координат и скоростей точек системы. Если такая функция при движении механической системы остается постоянной, то она называется *первым интегралом уравнений динамики* (1). Использование первых интегралов позволяет существенно упростить решение задачи. Самый распространенный прием получения первых интегралов уравнений (1) основан на исследовании *основных динамических величин системы*: *количества движения (импульса), кинетического момента, кинетической энергии*. Изменение этих величин во времени описывается *основными теоремами динамики*, являющихся следствиями уравнений (1). Утверждения, определяющие условия постоянства основных динамических величин, называются *законами сохранения*.

4.2. Теорема об изменении количества движения

- *Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему.*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^{(e)} \tag{2}$$

В уравнении (2) $\bar{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{v}_\nu$ - количество движения (импульс) механической системы, $\bar{R}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \bar{F}_\nu^{(e)}$ - *главный вектор внешних сил*. Так как $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{v}_\nu = M \cdot \bar{v}_C$, где M – масса всей механической системы, $\bar{v}_C$ - скорость ее центра масс, то (2) можно записать в виде

$$M\,\frac{d\overline{v}_C}{dt}=\overline{R}^{(e)}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называют *теоремой о движении центра масс*.

Проинтегрировав по времени правую и левую части (2), получим теорему об изменении количества движения в интегральной форме

$$\Delta\overline{Q}=\overline{Q}_2-\overline{Q}_1=\int_{t_1}^{t_2}\overline{R}^{(e)}dt\,, \qquad (4)$$

где $\overline{Q}_1=\overline{Q}(t_1)$ - импульс системы в момент времени t_1, $\overline{Q}_2=\overline{Q}(t_2)$ - импульс системы в последующий момент времени t_2.

Задача

Поворотный подъемник для ремонта уличной электросети установлен на автомашине (рис. 15). Люлька подъемника, укрепленная на однородном стержне, может поворачиваться вокруг горизонтальной оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка. В начальный момент времени подъемник находился в горизонтальном положении и автомашина покоилась. Определить перемещение незаторможенной машины, если подъемник повернулся на 60^0. Масса стержня m_1 = *100 кг*, люльки – m_2 = *200 кг*, автомашины - m_3 = *1 т*. Центр масс люльки отстоит от оси вращения на *3.5 м*, длина стержня – *3 м*. Сопротивлением движению пренебречь.

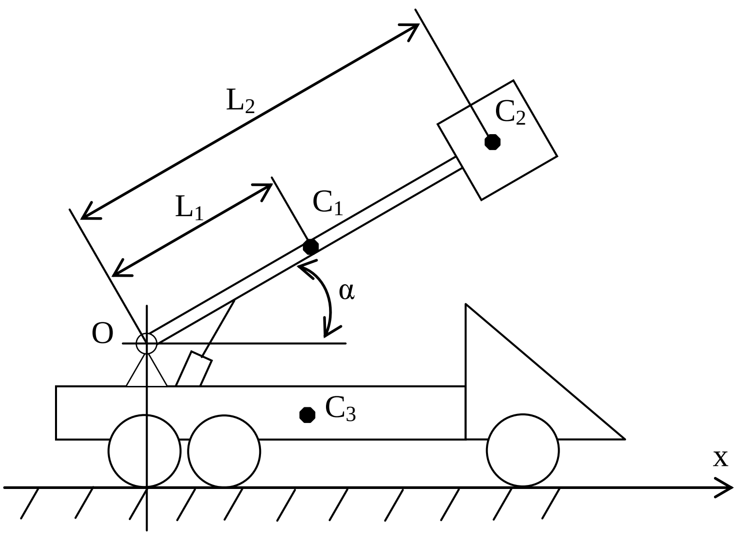


Рис. 15

Решение

Пусть *x* – ось горизонтального перемещения автомашины. На рассматриваемую механическую систему действует сила, развиваемая гидравлическим приводом подъемника, силы тяжести автомашины, люльки и стержня, силы реакции горизонтальной поверхности, на которую опираются колеса. Проанализируем эти силы. Сила, развиваемая гидроцилиндром, является *внутренней*, так как действует между точками механической системы; силы тяжести и силы реакции являются *внешними* и действуют в вертикальном направлении. В горизонтальном направлении *x* на механическую систему не действуют никакие внешние силы, следовательно, в проекции на это направление уравнение (3) будет иметь вид

$$M\frac{d\dot{x}_C}{dt}=0,$$

где $M=m_1+m_2+m_3$ - масса всей механической системы, $\dot{x}_C$ – проекция скорости центра масс системы на горизонтальное направление. Поделив на *M* обе части равенства и проинтегрировав его по времени *t*, получим ***<u>первый интеграл</u>***

$$\dot{x}_C=const,$$

т.е. горизонтальная скорость центра масс *C* системы в течение всего времени движения подъемника остается постоянной. Но так как в начальный момент времени система покоилась, то $\dot{x}_C=0$ и, следовательно, в течение всего времени движения $x_C=const$. Иначе говоря, горизонтальное положение центра масс механической системы не изменяется! Воспользуемся этим условием. Горизонтальное положение центра масс системы, в соответствии с п. 3.1., определяется равенством

$$x_C=\frac{1}{M}(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)=\frac{(m_1L_1+m_2L_2)\cos\alpha+M\cdot x_3}{M},$$

x_3 – горизонтальное положение центра масс автомашины. В начальный момент времени $x_3=0$, $\alpha=0^0$; в конечный - $x_3=S$, $\alpha=60^0$; из условия $x_C=const$ получим $\dfrac{(m_1L_1+m_2L_2)\cos 0^0+M\cdot 0}{M}=\dfrac{(m_1L_1+m_2L_2)\cos 60^0+M\cdot S}{M}$,

$S=\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1L_1+m_2L_2}{M}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{100\cdot 1.5+200\cdot 3.5}{1300}=0.327\,м.$ Таким образом, незаторможенная автомашина откатится вправо на *32.7 см*. При эксплуатации подобных технических средств, с целью исключения отката, следует обеспечить надежную фиксацию автомашины на специальных упорах.

4.3. Теорема об изменении кинетического момента

- *Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил относительно этого центра.*

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt}=\overline{M}_O^{(e)} \tag{5}$$

В уравнении (5) $\overline{K}_O=\sum_{\nu=1}^{N}\overline{r}_\nu\times m_\nu\overline{v}_\nu$ - кинетический момент (момент количества движения) относительно неподвижной точки *O*, $\overline{M}_O^{(e)}=\sum_{\nu=1}^{N}\overline{r}_\nu\times\overline{F}_\nu^{(e)}$ - ***<u>главный</u>***

<u>момент внешних сил</u> относительно точки *O*. В интегральной форме уравнение (5) имеет вид

$$\Delta\overline{K}_O = \overline{K}_{O2} - \overline{K}_{O1} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{M}_O^{(e)} dt\,, \qquad (6)$$

где $\overline{K}_{O1} = \overline{K}_O(t_1)$ - кинетический момент механической системы в момент времени t_1, $\overline{K}_{O2} = \overline{K}_O(t_2)$ - кинетический момент системы в момент времени t_2.

<u>Задача</u>

Для экспериментального определения момента трения в подшипниковых опорах на вал насажен маховик массы *M = 500 кг* (Рис. 16); радиус инерции маховика $\rho = 1.5$ *м*. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая частоте вращения *n = 240 об/мин*; предоставленный самому себе, он остановился через *10 мин*. Определить момент трения M_T, считая его постоянным.

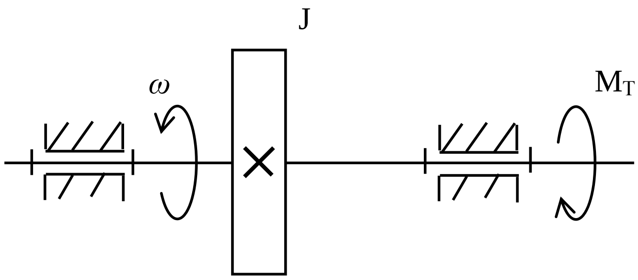


Рис. 16

<u>Решение</u>

Вычислим угловую скорость вращения вала в начальный момент времени и момент инерции маховика относительно оси вращения: $\omega_0 = n \cdot 2\pi/60 = 240\pi/30 = 8\pi$ *рад/с*, $J = M \cdot \rho^2 = 500 \cdot 1.5^2 = 1125$ *кг·м²*. Уравнение динамики маховика, согласно (5) и с учетом $K = J\omega$, имеет вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = -M_T\,.$$

Проинтегрируем это уравнение по времени *t*

$$\omega(t) = -\frac{M_T}{J} \cdot t + C\,,$$

где *C* – постоянная интегрирования, значение которой, в соответствии с начальным условием $\omega(0) = \omega_0$, равно ω_0. Так как через *T = 600 с* маховик остановился, то $\omega(T) = \omega_0 - (M_T/J) \cdot T = 0$, откуда

$$M_T = \frac{J\omega_0}{T} = \frac{1125 \cdot 8 \cdot \pi}{600} \approx 47.1\text{ Н·м}.$$

Задача

На вращающейся платформе стоит человек с вытянутыми в стороны руками. Платформе сообщается угловая скорость, соответствующая частоте вращения $n_0 = 15$ *об/мин*. При этом момент инерции человека и платформы относительно оси вращения $J_0 = 0.8$ *кг·м*^{2}. С какой угловой скоростью начнет вращаться платформа с человеком, если, приблизив руки к туловищу, он уменьшит момент инерции системы до 0.12 *кг·м*^{2}*?* Трением пренебречь.

Решение

Определим угловую скорость системы в начальный момент времени: $\omega_0 = n_0 \cdot 2\pi/60 = 15\pi/30 = 0.5\pi$ *рад/с*. Проанализируем силы, действующие на систему. На человека и платформу действуют только силы тяжести, которые направлены вдоль оси вращения и, следовательно, моменты сил тяжести относительно этой оси равны нулю. Таким образом, уравнение (5) будет иметь вид

$$\frac{dK_Z}{dt} = 0,$$

где Z – ось вращения. *Первый интеграл* этого уравнения $K_Z = const$, т.е. кинетический момент системы относительно оси Z не изменяется. Из этого следует $J_0\omega_0 = J_1\omega_1$ и

$$\omega_1 = \frac{J_0}{J_1}\omega_0 = \frac{0.8}{0.12}\cdot 0.5\pi = \frac{10}{3}\pi \text{ рад/с},$$

что соответствует частоте вращения $n_1 = \dfrac{30\omega_1}{\pi} = \dfrac{30\cdot 10\pi}{3\pi} = 100$ *об/мин*.

4.4. Теорема об изменении кинетической энергии

- *Дифференциал кинетической энергии механической системы равен элементарной работе всех сил, приложенных к системе*[5].

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)} \tag{7}$$

В уравнении (7) $T = \dfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \bar{v}_\nu^2$ - *кинетическая энергия* механической системы, $d'A^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \bar{F}_\nu^{(e)} d\bar{r}_\nu$ - элементарная работа внешних сил, $d'A^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{N} \bar{F}_\nu^{(i)} d\bar{r}_\nu$ - элементарная работа внутренних сил.

Проинтегрировав обе части равенства (7) от t_1 до t_2 получим интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии

[5] Штрих при знаке дифференциала в (7) означает, что элементарная работа системы сил может не являться *полным дифференциалом* A, т.е. не обязательно существует такая скалярная функция $U(x, y, z)$, что $dA = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy + (\partial U/\partial z)dz$.

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(e)} + \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(i)} . \tag{8}$$

Если все силы системы потенциальны и их потенциал *П* не зависит явно от времени, то элементарная работа сил системы будет *полным дифференциалом* и уравнение (7) примет вид

$$dT + d\Pi = 0 . \tag{9}$$

Из равенства (9) следует *закон сохранения полной механической энергии системы*

$$E = T + \Pi = const. \tag{10}$$

- *Если все силы системы потенциальны и потенциал явно не зависит от времени, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна.*

Задача

Автомобиль массы *M* движется прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью v . Коэффициент трения качения между колесами автомобиля и дорогой равен f_k, радиус колес – r, сила аэродинамического сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости: $R_C = \mu M g v^2$, где μ – коэффициент, зависящий от формы автомобиля. Определить мощность двигателя, передаваемую на оси ведущих колес, в установившемся режиме.

Решение

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии (7) будем иметь

$$dT = d'A_Д - d'A_C ,$$

где $d'A_Д$ - элементарная работа движущей силы, $d'A_C$ - элементарная работа сил сопротивления движению. В установившемся режиме скорость v автомобиля постоянна и, следовательно, его кинетическая энергия не изменяется, т.е. $dT = 0$. Это означает, что $d'A_Д = d'A_C$. Раскроем правую часть полученного равенства:

$$d'A_Д = \mu M g v^2 dS + Mg \frac{f_k}{r} dS .$$

Здесь dS – элементарное перемещение автомобиля. Тогда мощность, передаваемая двигателем на оси ведущих колес, будет равна

$$N = \frac{d'A_Д}{dt} = Mg\left(\mu v^2 + \frac{f_k}{r}\right)\frac{dS}{dt} = Mg\left(\mu v^2 + \frac{f_k}{r}\right)v .$$

Таким образом, при движении с постоянной скоростью по горизонтальной дороге двигатель автомобиля развивает постоянную мощность; соответственно, топливо в баке расходуется равномерно.

Задача

Стальной шарик сброшен с высоты $H = 15$ *м* без начальной скорости. Найти скорость шарика V в момент его удара о землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

На шарик действует только сила тяжести, которая является потенциальной и ее потенциал явно от времени не зависит. Следовательно, в соответствии с (10), полная механическая энергия шарика при его движении будет постоянной

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh = const.$$

Так как в начальный момент времени шарик покоился и обладал только потенциальной энергией, то в момент удара о землю вся его начальная потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию

$$\frac{mV^2}{2} = mgH\ .$$

Отсюда следует, что $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 15} \approx 17{,}16\, м/с$. Результат решения этой задачи дает нам право утверждать, что скорость свободного падения тел не зависит от их массы.

4.5. Вопросы для проверки усвоения материала

1) Какие утверждения называют основными теоремами динамики? Сформулируйте эти утверждения.
2) Что называют количеством движения системы?
3) Что называют кинетическим моментом системы?
4) Что называют кинетической энергией системы?
5) Что называют полной механической энергией системы?
6) В чем состоит практическая ценность основных теорем динамики?
7) Какие утверждения называют законами сохранения? Как связаны законы сохранения с основными теоремами динамики?
8) Решите задачу о свободном падении стального шарика путем составления и интегрирования уравнения динамики. Сравните полученное решение с решением, приведенным в п. 4.4. Сделайте вывод.

5. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. Уравнения динамики свободного твердого тела

Динамика свободного твердого тела (рис. 17) описывается двумя векторными уравнениями:

$$M\frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{R}^{(e)}, \tag{1}$$

где $\bar{v}_C$ - скорость центра масс твердого тела,

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{M}_C^{(e)}, \tag{2}$$

где $\bar{K}_C = J_C \cdot \bar{\omega}$ - кинетический момент тела относительно центра масс, J_C – тензор инерции тела в системе координат *Cxyz*, жестко связанной с твердым телом, $\bar{\omega}$ - угловая скорость тела.

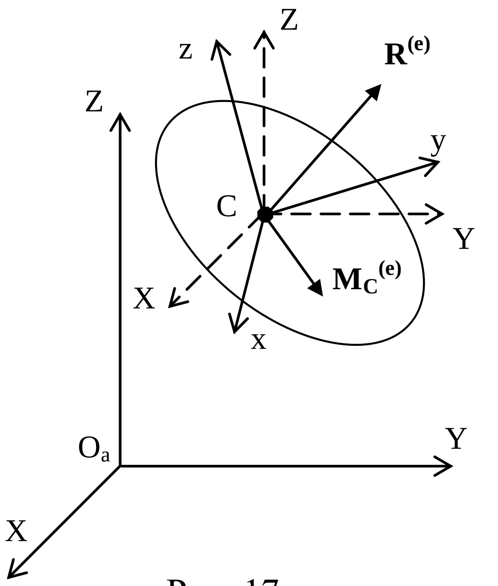


Рис. 17

Напомним, что система координат O_aXYZ является абсолютной, а *CXYZ* – перемещается вместе с твердым телом таким образом, что ее оси *CX*, *CY*, *CZ* всегда параллельны соответствующим осям абсолютной системы координат. В координатной форме уравнение (1) будет иметь вид

$$M\ddot{X}_C = R_X,\ M\ddot{Y}_C = R_Y,\ M\ddot{Z}_C = R_Z, \tag{3}$$

а уравнение (2)

$$\begin{gathered}
J_x\dot{\omega}_x - J_{xy}\dot{\omega}_y - J_{xz}\dot{\omega}_z + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z + J_{yz}(\omega_z^2 - \omega_y^2) + \omega_x(J_{xy}\omega_z - J_{xz}\omega_y) = M_x, \\
J_y\dot{\omega}_y - J_{xy}\dot{\omega}_y - J_{yz}\dot{\omega}_z + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z + J_{xz}(\omega_x^2 - \omega_z^2) + \omega_y(J_{yz}\omega_x - J_{xy}\omega_z) = M_y, \\
J_z\dot{\omega}_z - J_{yz}\dot{\omega}_y - J_{xz}\dot{\omega}_x + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x + J_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2) + \omega_z(J_{xz}\omega_y - J_{yz}\omega_x) = M_z.
\end{gathered} \tag{4}$$

В уравнениях (4) J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} – компоненты тензора инерции в системе координат *Cxyz*. Если оси этой системы координат являются <u>*главными осями инерции*</u> тела, т.е. $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$, то уравнения (4) приобретают более простой вид

$J_x\dot\omega_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x$, $J_y\dot\omega_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y$, $J_z\dot\omega_z + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x = M_z$. (5)
Уравнения (5) называют *динамическими уравнениями Эйлера*.

Задача

В момент метания диска (рис. 18) его плоскость занимает горизонтальное положение, а центр диска находится на высоте h от поверхности Земли. Диску сообщена горизонтальная скорость V_0, а сам диск закручен с угловой скоростью ω_0, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ с его плоскостью. Считая диск тонкой однородной пластинкой, найти его движение. Влиянием воздуха пренебречь.

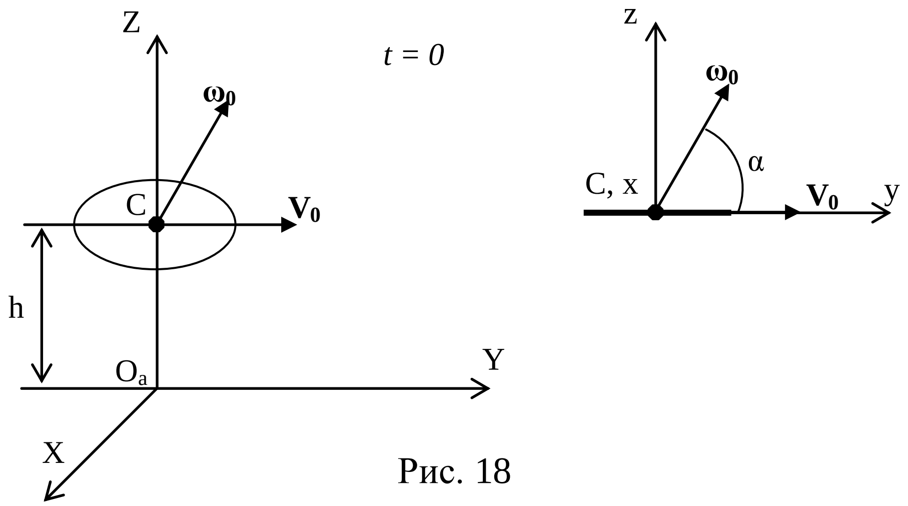


Рис. 18

Решение

Составим уравнения динамики центра масс диска. Согласно (3), будем иметь

$$\ddot X_C = 0,\ \ddot Y_C = 0,\ \ddot Z_C = -g,$$

где g – ускорение свободного падения. Интегрирование этих уравнений с учетом начальных условий $X_C(0) = \dot X_C(0) = 0$, $Y_C(0) = 0$, $\dot Y_C(0) = V_0$, $Z_C(0) = h$, $\dot Z_C(0) = 0$ дает закон движения центра масс

$$X_C(t) = 0,\ Y_C(t) = V_0 t,\ Z_C(t) = h - gt^2/2,$$

траектория движения – парабола.

Рассмотрим вращение диска. Оси координат $Cxyz$ направим таким образом, чтобы они были главными осями инерции (рис. 18). Тогда $J_z = MR^2/2$, $J_x = J_y = MR^2/4$, M – масса, R – радиус диска. Обозначая $J_x = J_y = J$, $J_z = 2J$, согласно (5) получим уравнения динамики вращения диска

$$\dot\omega_x + \omega_y\omega_z = 0, \dot\omega_y - \omega_x\omega_z = 0, \dot\omega_z = 0.$$

Из последнего уравнения, с учетом $\omega_z(0) = \omega_0 \sin\alpha$, получим $\omega_z(t) = \omega_0 \sin\alpha$, т.е. проекция угловой скорости диска на ось Cz постоянна. Подставив $\omega_z = a$ в первое и второе уравнения, получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$\dot{\omega}_x + a\omega_y = 0,$

$\dot{\omega}_y - a\omega_x = 0.$

Общее решение системы $\omega_x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at$, $\omega_y(t) = C_1 \sin at - C_2 \cos at$. Произвольные постоянные C_1, C_2 определим, используя начальные условия $\omega_x(0) = 0$, $\omega_y(0) = \omega_0 \cos\alpha$. Будем иметь $C_1 = 0$, $C_2 = -\omega_0 \cos\alpha$ и $\omega_x(t) = -(\omega_0 \cos\alpha)\sin(\omega_0 \sin\alpha)t$, $\omega_y(t) = (\omega_0 \cos\alpha)\cos(\omega_0 \sin\alpha)t$. Подставляя $\alpha = \pi/4$, окончательно получим

$$\omega_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 t,\ \omega_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 t,\ \omega_z = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0.$$

Таким образом, вектор угловой скорости диска равномерно вращается с частотой $\omega_0\sqrt{2}/2$ в системе координат *Cxyz*, жестко связанной с диском. Диск совершает *<u>регулярную прецессию</u>* в системе координат *CXYZ*, ось прецессии задает вектор кинетического момента диска $\overline{K}_C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}J\omega_0 & \sqrt{2}\,J\omega_0 \end{bmatrix}^T$.

5.2. Уравнения динамики плоского движения твердого тела

Пусть все точки тела движутся параллельно неподвижной плоскости O_aXY. Тогда уравнения динамики тела будут иметь вид

$$M\ddot{X}_C = R_X,\ M\ddot{Y}_C = R_Y,\ R_Z = 0, \tag{6}$$

$$-J_{xz}\dot{\omega}_z + J_{yz}\omega_z^2 = M_x,\ -J_{yz}\dot{\omega}_z - J_{xz}\omega_z^2 = M_y,\ J_z\dot{\omega}_z = M_z. \tag{7}$$

Последнее уравнение из (6) и первые два уравнения из (7) налагают ограничения на геометрию масс тела, внешние силы и частично на начальные условия, при которых плоское движение возможно. Остальные уравнения являются уравнениями динамики плоского движения твердого тела.

<u>Задача</u>

Тонкий однородный стержень приставлен одним концом к гладкой вертикальной стене, а другим концом опирается на гладкий горизонтальный пол (рис. 19). Стержень пришел в движение, когда он составлял угол α с вертикалью. Вычислить начальные давления стержня на стену и пол.

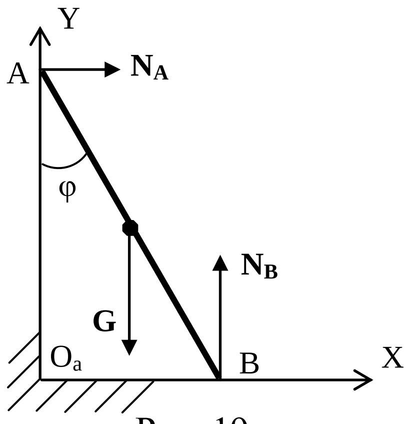


Рис. 19

Решение

Стержень движется под действием силы тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$, а также реакций $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ стены и пола. Пусть L – длина стержня, X, Y – координаты его центра тяжести в неподвижной системе координат. Дифференциальные уравнения динамики стержня, в соответствии с (6), (7), имеют вид

$$m\ddot{X} = N_A,\ m\ddot{Y} = N_B - mg,\ \frac{mL^2}{12}\ddot{\varphi} = -\frac{L}{2}N_A\cos\varphi + \frac{L}{2}N_B\sin\varphi .$$

Так как $X = \frac{L}{2}\sin\varphi$, $Y = \frac{L}{2}\cos\varphi$; $\ddot{X} = \frac{L}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$, $\ddot{Y} = -\frac{L}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$, то из первых двух уравнений динамики стержня имеем

$$N_A = \frac{mL}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi),\ N_B = mg - \frac{mL}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi).$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение динамики и, учитывая, что $\varphi(0) = \alpha$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, получим при $t = 0$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\alpha .$$

Следовательно, искомые начальные значения сил давления стержня на стену и пол $N_A = \frac{3}{4}mg\sin\alpha\cos\alpha$, $N_B = mg\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right)$.

5.3. Уравнения динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг оси Z (рис. 20). Его уравнения динамики имеют вид

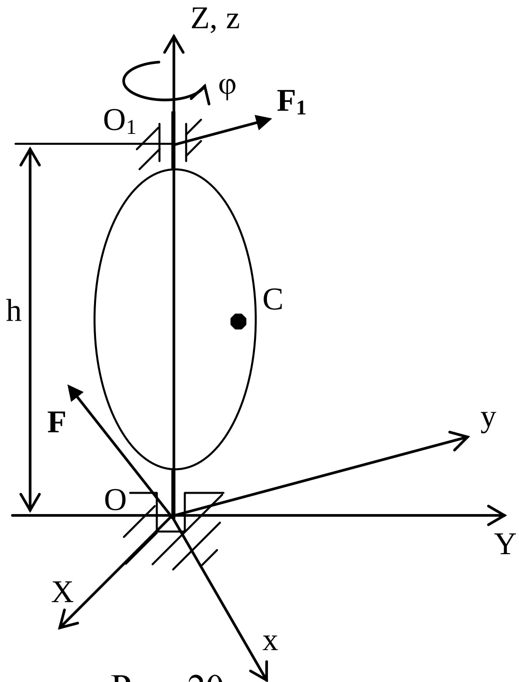


Рис. 20

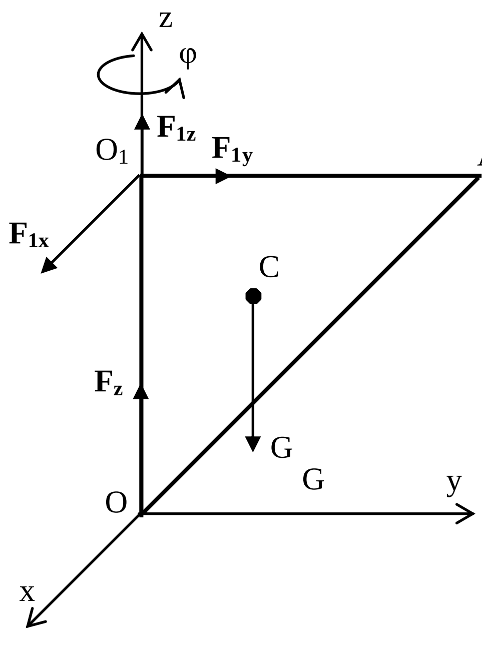


Рис. 21

$$-My_C\ddot{\varphi}-Mx_C\dot{\varphi}^2=R_x+F_x+F_{1x},\; Mx_C\ddot{\varphi}-My_C\dot{\varphi}^2=R_y+F_y+F_{1y},\; 0=R_z+F_z+F_{1z}, \quad (8)$$

$$-J_{xz}\ddot{\varphi}+J_{yz}\dot{\varphi}^2=M_x-hF_{1y},\; -J_{yz}\ddot{\varphi}-J_{xz}\dot{\varphi}^2=M_y+hF_{1x},\; J_z\ddot{\varphi}=M_z. \quad (9)$$

Последнее уравнение из (9) является уравнением динамики вращения тела вокруг вертикальной оси. Остальные уравнения служат для нахождения реакций $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ в опорах *O* и *O₁*.

Задача

Равнобедренный прямоугольный треугольник OO_1A вращается вокруг вертикальной оси, к которой подвешен катетом $OO_1 = a$ (рис. 21). Какова должна быть угловая скорость вращения, чтобы боковое давление треугольника на нижнюю опору *O* было равно нулю? Треугольник считать тонкой однородной пластинкой.

Решение

Положение центра тяжести пластинки $x_C=0$, $y_C=a/3$, центробежный момент инерции $J_{xz}=0$, а для J_{yz} имеем

$$J_{yz}=\int yz dM=\frac{2M}{a^2}\int_0^a\int_0^z zydydz=\frac{M}{a^2}\int_0^a z^3dz=\frac{Ma^2}{4}.$$

Далее, $R_x=R_y=0$, $R_z=G=-Mg$, $M_x=-\frac{Mga}{3}$, $M_z=M_y=0$.

По условию задачи $F_x=F_y=0$; из (8) и (9) получим

$$-\frac{1}{3}Ma\ddot{\varphi}=F_{1x},\; -\frac{1}{3}Ma\dot{\varphi}^2=F_{1y},\; 0=-Mg+F_z+F_{1z},$$

$$\frac{1}{4}Ma^2\dot{\varphi}^2=-\frac{1}{3}Mga-aF_{1y},\; -\frac{1}{4}Ma^2\ddot{\varphi}=aF_{1x},\; J_z\ddot{\varphi}=0.$$

Из последнего уравнения следует, что треугольник вращается с постоянной скоростью $\dot{\varphi}=\omega=const$. Исключив из второго и четвертого уравнений величину F_{1y}, получим, что боковое давление треугольника на нижнюю опору *O* равно нулю при $\omega=2\sqrt{g/a}$.

5.4. Вопросы для проверки усвоения материала

1) Какие основные теоремы используются для описания динамики твердого тела? Сформулируйте эти теоремы.
2) Сколько независимых скалярных уравнений требуется для описания динамики свободного твердого тела?

3) В каком случае динамика вращательного движения твердого тела будет описываться динамическими уравнениями Эйлера?
4) Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Какие условия должны выполняться, чтобы динамические реакции опор были равны статическим реакциям?

6. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

6.1. Общее уравнение динамики. Принцип Даламбера – Лагранжа

Рассмотрим механическую систему, состоящую из материальных точек P_ν, $\nu = 1,2,\dots,N$. Связи, наложенные на точки системы, будем считать удерживающими и <u>*идеальными*</u>[6]. Тогда динамика системы будет описываться уравнением

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\overline{F}_\nu - m_\nu \overline{w}_\nu)\delta\overline{r}_\nu = 0, \tag{1}$$

где $\overline{F}_\nu$ - равнодействующие активных сил, приложенных к точкам системы, $\delta\overline{r}_\nu$ - допускаемые связями виртуальные перемещения. Уравнение (1) называют <u>*общим уравнением динамики*</u> или <u>*принципом Даламбера – Лагранжа*</u>. Формулировка этого принципа следующая

- *Истинное движение от всех кинематически возможных отличается тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма*

[6] Идеальными называют такие связи, работа которых на всех допускаемых ими виртуальных перемещениях равна нулю.

элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Это утверждение также называют *дифференциальным вариационным* принципом, так как в нем сравниваются вариации положений системы для произвольного фиксированного момента времени движения. Принцип Даламбера – Лагранжа занимает центральное место в механике; он является общим теоретическим основанием для большого числа утверждений, характеризующих движение различных механических систем под действием сил, например, *основных теорем динамики*.

Задача

Получить уравнение динамики шарика из задачи п. 2.3., рис. 7, используя принцип Даламбера – Лагранжа.

Решение

Выберем декартовую систему координат так, чтобы ось Ox была направлена вниз. Тогда уравнения связи будут иметь вид $x = L\cos\varphi$, $y = L\sin\varphi$. Виртуальные перемещения шарика вдоль координатных осей найдем из соотношений

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\delta\varphi = -L\sin\varphi\,\delta\varphi,\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\delta\varphi = L\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Общее уравнение динамики (1) в данном случае принимает вид

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y = 0\,.$$

Подставив в него выражения для $\delta x, \delta y$, а также $\ddot{x} = -\ddot{\varphi}L\sin\varphi - \dot{\varphi}^2 L\cos\varphi$, $\ddot{y} = \ddot{\varphi}L\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 L\sin\varphi$, $F_x = mg$ и $F_y = 0$, получим

$$-mL(g\sin\varphi + L\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0\,,$$

откуда, ввиду произвольности $\delta\varphi$, следует уравнение динамики $\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$.

6.2. Уравнения Лагранжа II рода

Для *голономной* механической системы с идеальными удерживающими связями справедливы уравнения динамики в следующем виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1,2,\ldots,m, \qquad (2)$$

где T – кинетическая энергия системы, q_j – *обобщенные координаты*, Q_j – *обобщенные силы*[7]. Уравнения (2) широко используются при изучении движения систем с большим числом степеней свободы, так как позволяют

[7] Обобщенными силами в механике называют активные силы, приведенные к обобщенным координатам.

получить замкнутую систему дифференциальных уравнений динамики, не принимая в расчет реакции связей.

Задача

Для плоского манипулятора (рис. 22) получить уравнения динамики. Момент инерции звена *1* – J_1, масса звена *2* – m_2, центр масс звена *2* находится в месте соединения звеньев *1* и *2*. Момент, развиваемый двигателем первого звена – *M*, усилие, развиваемое приводом второго звена – *P*.

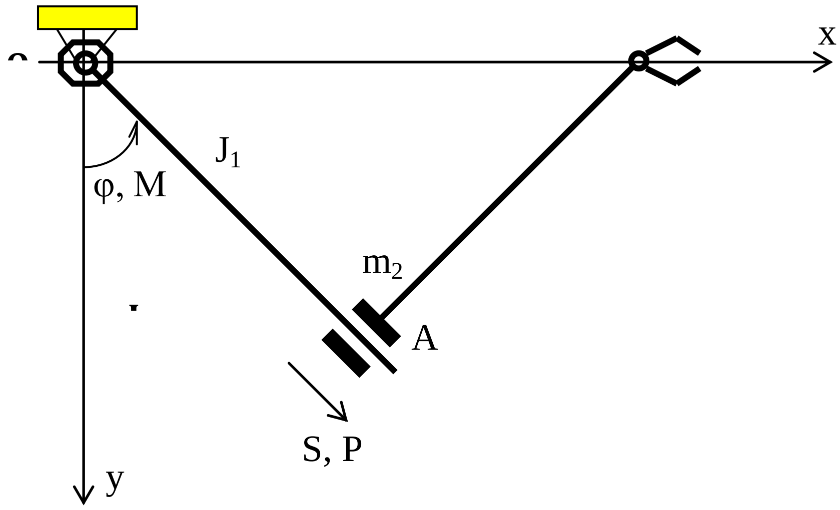


Рис. 22

Решение

Будем рассматривать манипулятор как систему с двумя степенями свободы, приняв за обобщенные координаты угол φ поворота звена *1* и перемещение *S* звена *2*.

Для рассматриваемой системы можно записать: $x_A = S\sin\varphi, y_A = S\cos\varphi$; данные равенства являются уравнениями связей.

В соответствии с выбранными обобщенными координатами имеем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right] - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S\,, \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi\,.$$

Составим выражение для кинетической энергии системы T как функцию обобщенных координат φ, S, обобщенных скоростей $\dot{\varphi}$, $\dot{S}$. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии T_1 звена 1 и T_2 звена 2.

Кинетическая энергия звена *2* будет равна $T_2 = \frac{m_2 V_A^2}{2}$, кинетическая энергия звена 1, совершающего вращательное движение, $T_1 = \frac{J_1 \omega^2}{2}$. Продифференцировав уравнения связей по времени, будем иметь:

$$\dot{x}_A = \dot{S}\sin\varphi + \dot{\varphi}S\cos\varphi, \dot{y}_A = \dot{S}\cos\varphi - \dot{\varphi}S\sin\varphi.$$

Возводя в квадрат выражения для $\dot{x}_A$ и $\dot{y}_A$, сложим их для получения квадрата скорости точки *A*: $V_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = \dot{S}^2 + \dot{\varphi}^2 S^2$. Выражение для кинетической энергии системы примет вид:

$$T = \frac{m_2 \left(\dot{S}^2 + \dot{\varphi}^2 S^2\right)}{2} + \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Найдем значения слагаемых уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 \dot{\varphi} S^2 + (m_2 S^2 + J_1)\dot{\varphi},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \ddot{\varphi}(m_2 S^2 + J_1) + 2m_2 \dot{\varphi}\dot{S}S,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = m_2 \dot{S},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = m_2 \ddot{S},\ \frac{\partial T}{\partial S} = m_2 \dot{\varphi}^2 S.$$

Для определения Q_φ мысленно наложим на систему связь $S = const$ и, сообщив системе возможную скорость $\dot{\varphi}$, вычислим возможную мощность сил, действующих на нее: $N_\varphi = Q_\varphi \dot{\varphi} = M\dot{\varphi} \Rightarrow Q_\varphi = M$. Аналогично, мысленно наложив на механическую систему связь $\varphi = const$ и сообщив ей возможную скорость $\dot{S}$, получим обобщенную силу $Q_S = P$.

Подставив полученные выражения в уравнения Лагранжа, окончательно будем иметь

$$\ddot{\varphi}\left(m_2 S^2 + J_1\right) + 2\dot{\varphi}\dot{S}m_2 S = M; m_2\ddot{S} - m_2\dot{\varphi}^2 S = P.$$

Анализ уравнений динамики показывает, что момент M, развиваемый приводом звена *1*, преодолевает инерционный момент со стороны звеньев *1* и *2*, вызванный угловым ускорением звена *1*, а также момент кориолисовой силы инерции; усилие P, развиваемое приводом звена *2*, преодолевает силу инерции звена *2*, вызванную ускорением $\ddot{S}$, а также центробежную силу инерции.

6.3. Вопросы для проверки усвоения материала

1) Сформулируйте принцип Даламбера – Лагранжа. Почему этот принцип относится к дифференциальным принципам механики?
2) Запишите уравнения Лагранжа II рода для механической системы с числом степеней свободы m. Назовите основное достоинство этих уравнений.
3) Почему уравнения Лагранжа II рода справедливы только для голономных систем?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов С.А, Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 336 с.
2. Кузьмин Д.В. Определение управляющих сил и моментов, обеспечивающих программное движение манипулятора: Методические указания к выполнению курсовой работы. – Северодвинск: Севмашвтуз, 1998. – 14 с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – 36-е изд., исправл. / Под ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина. – М.: Наука, 1986. – 448 с.